

Intégrateurs variationnels pour les fluides géophysiques

François Gay-Balmaz

LMD, Ecole normale supérieure, Paris

1. Motivation

2. Intégrateurs symplectiques

- 2.1 Exemple
- 2.2 Intégrateurs symplectiques
- 2.3 Intégrateurs variationnels

3. Principes variationnels en hydrodynamique

- 3.1 Euler incompressible
- 3.2 Réduction de Euler-Poincaré
- 3.3 Réduction de Euler-Poincaré avec advection

4. Discrétisation du groupe de difféomorphismes

- 4.1 Discrétisation du domaine
- 4.2 Groupe de difféomorphismes discrets
- 4.3 Discrétisation spatiale des équations (cas Boussinesq)

5. Schémas numériques

- 5.1 Maillage cartésien 2D
- 5.2 Maillage icosaédrique
- 5.3 Cas 3D
- 5.4 Intégration temporelle

1. MOTIVATION

Modélisation de la circulation atmosphérique: équations primitives

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}_h + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_h + \text{rot } \mathbf{R} \times \mathbf{u}_h = -\nabla_h p, \\ \partial_t w + \mathbf{u} \cdot \nabla w + \frac{g}{\theta_0} \theta = -\partial_z p, \\ \dot{\theta} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = 0. \end{cases}$$

Propriétés:

- Résulte d'approximations successives des équations d'Euler stratifiées en rotation.
- Tous ces modèles (dans le cas conservatif) admettent une formulation Hamiltonienne (i.e. crochet de Poisson) et formulation Lagrangienne (i.e. principes variationnels)
- L'approximation peut être faite au niveau du Lagrangien.
- Contexte climatique: on souhaite comportement global satisfaisant sur un temps long et non nécessairement une grande précision locale.

But: développer un intégrateur qui respecte au mieux ces propriétés.

2. Intégrateurs symplectiques

(livre: *Hairer, Lubich & Wanner [2006]*)

2.1 Exemple



$$\ddot{q} = -\frac{g}{L} \sin q,$$

Explicit Euler

$$\begin{cases} q_{k+1} = q_k + h v_k \\ v_{k+1} = v_k - h \frac{g}{L} \sin q_k \end{cases}$$

Modified Euler

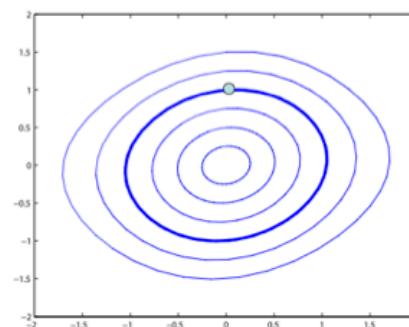
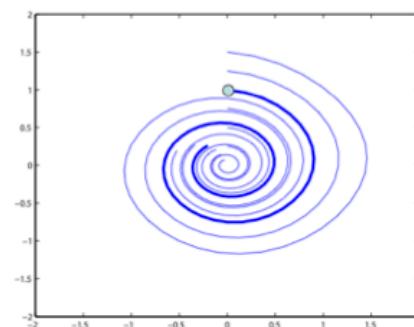
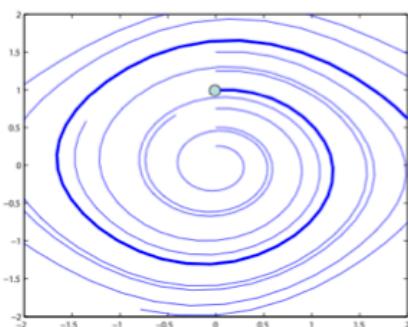
$$\begin{cases} v_{k+1} = v_k - h \frac{g}{L} \sin q_k \\ q_{k+1} = q_k + h v_{k+1} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{q} &= v \\ \dot{v} &= -\frac{g}{L} \sin q \end{aligned}$$

Implicit Euler

$$\begin{cases} q_{k+1} = q_k + h v_{k+1} \\ v_{k+1} = v_k - h \frac{g}{L} \sin q_{k+1} \end{cases}$$

Phase spaces diagrams



Only the third method captures the periodic nature of the pendulum. Why?

2.2 Intégrateurs symplectiques

Formulation Hamiltonienne:

Soit Q la variété de configuration du système.

Ex: pendule $Q = S^1$, N -particules $Q = \mathbb{R}^{3N}$, toupie $Q = SO(3)$, Euler incompressible $Q = \text{Diff}_{vol}(\mathcal{D})$, Euler compressible $Q = \text{Diff}(\mathcal{D})$.

Espace des vitesses: fibré tangent $TQ = \bigcup_{q \in Q} T_q Q \ni (q^i, \dot{q}^i)$;

Espace de phase: fibré cotangent $T^*Q := \bigcup_{q \in Q} T_q^* Q \ni (q^i, p_i)$;

T^*Q est muni d'une forme symplectique canonique $\Omega_{can} = dq^i \wedge dp_i$.

Soit $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$, $H = H(q^i, p_i)$ l'Hamiltonien du système. Les

Équations de Hamilton sont

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

En général: Forme symplectique ω sur une variété M : 2-forme fermée, non-dégénérée : $TM \rightarrow T^*M$, $u \mapsto i_u \omega := \omega(u, \cdot)$ est un isomorphisme. Les équations de Hamilton associées à $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ sont

$$\frac{d}{dt} c(t) = X_h(c(t)) \quad \text{où} \quad i_{X_h} \omega = dH.$$

Définition: $f : M \rightarrow M$ est une application symplectique si $f^*\omega = \omega$.

Propriété: Le flot des équations de Hamilton est une application symplectique.

Ex: cas $M = T^*Q$, $\omega = \Omega_{can}$:

$$(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) \in T^*Q \rightarrow \Phi_t(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \in T^*Q$$

est symplectique.

Définition: Un intégrateur $(\mathbf{q}_{k+1}, \mathbf{p}_{k+1}) = \Phi_h(\mathbf{q}_k, \mathbf{p}_k)$ est symplectique si Φ_h est une application symplectique.

Propriétés: Excellent comportement global: pas de dissipation d'énergie – typiquement l'énergie oscille faiblement autour d'une valeur de référence, avec le même coût que les méthodes standards.

Ex. Euler modifié est un intégrateur symplectique

~ Comment construire un intégrateur symplectique?

~ Comment utiliser cette approche dans le cas de la mécanique des fluides?

- Une approche possible: intégrateurs variationnels.

2.3 Intégrateurs variationnels

Formulation Lagrangienne:

Soit $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$, $L = L(q^i, \dot{q}^i)$, le Lagrangien du système (énergie cinétique - énergie potentielle).

Les Equations d'Euler-Lagrange sont

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Principe d'action critique:

$$\delta \int_0^T L(q, \dot{q}) dt = \int_0^T \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = \int_0^T \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt$$

pour toutes variations δq telles que $\delta q(0) = \delta q(T) = 0$.

Transformation de Legendre: $H(q, p) = p \cdot \dot{q} - L(q, \dot{q})$, $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$.

Intégrateurs variationnels: (*Marsden&West [2001]* and references)

Idée principale: Discréter le principe variationnel et non les équations.

Lagrangien discret $L_d : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$

$$L_d(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1}) \simeq \int_{t_k}^{t_{k+1}} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt \quad \sum_{k=0}^{N-1} L_d(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1}) \simeq \int L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt$$

$$\begin{aligned} \delta \sum_{k=0}^{N-1} L_d(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1}) &= \sum_{k=0}^{N-1} \left[D_1 L_d(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1}) \delta \mathbf{q}_k + D_2 L_d(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1}) \delta \mathbf{q}_{k+1} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left[D_1 L_d(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1}) \delta \mathbf{q}_k + D_2 L_d(\mathbf{q}_{k-1}, \mathbf{q}_k) \right] \delta \mathbf{q}_k \end{aligned}$$

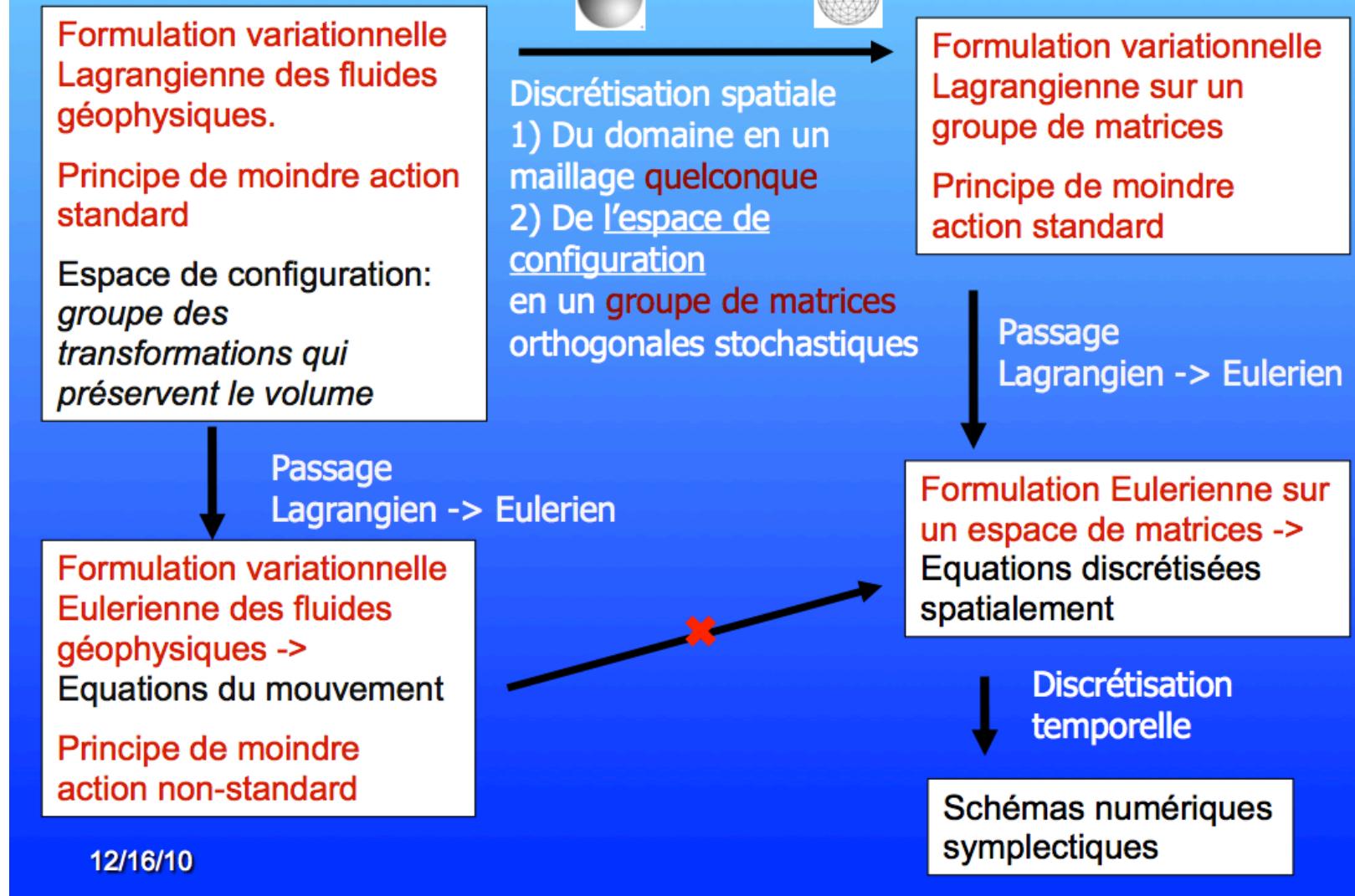
Équations d'Euler-Lagrange discrètes:

$$D_1 L_d(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1}) \delta \mathbf{q}_k + D_2 L_d(\mathbf{q}_{k-1}, \mathbf{q}_k) = 0.$$

Propriété: C'est un intégrateur symplectique.

~ quels sont les principes variationnels associés aux équations de la mécanique des fluides?

Vue générale



3. Principes variationnels en hydrodynamique

3.1 Euler incompressible

(\mathcal{D}, g) variété Riemannienne compacte avec bord C^∞ , μ forme volume.

$$\partial_t \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = -\nabla p, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} \parallel \partial \mathcal{D}, \quad \dot{\varphi}(t, X) = \mathbf{u}(t, \varphi(t, X))$$

Arnold [1966]: $\mathbf{u}(t)$ est une solution des équations d'Euler si et seulement si son flot $\varphi(t)$ est une géodésique sur le groupe $\operatorname{Diff}_{vol}(\mathcal{D})$ des difféomorphismes de \mathcal{D} qui préservent le volume ($\varphi^* \mu = \mu$), par rapport à la métrique Riemannienne

$$\langle U_\varphi, V_\varphi \rangle := \int_{\mathcal{D}} g(\varphi(X)) (U_\varphi(X), V_\varphi(X)) \mu(X), \quad U_\varphi, V_\varphi \in T_\varphi \operatorname{Diff}_{vol}(\mathcal{D})$$

~ Le Lagrangien est $L : T \operatorname{Diff}_{vol}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \|\dot{\varphi}(X)\|^2 \mu(X)$$

~ Le principe variationnel est

$$\delta \int_0^T L(\varphi, \dot{\varphi}) dt = 0, \quad \forall \delta \varphi \text{ tels que } \delta \varphi(0) = \delta \varphi(T) = 0$$

Remarques:

- **C'est une approche formelle** (pas de calcul différentiel rigoureux sur les variétés de dimension infinie, pas de résultat d'existence de solutions).
- **Pour l'approche analytique:** voir *Ebin&Marsden 1970*: groupe $\text{Diff}_{vol}^s(\mathcal{D})$, des difféomorphismes de classe Sobolev H^s , $s > \dim M/2 + 1$ – Variété Hilbertiennes – résultat d'existence et d'unicité locale des solutions H^s , $s > \dim M/2 + 1$.

Principe Variationnel en représentation Eulerienne:

L est $\text{Diff}_{vol}(\mathcal{D})$ invariant:

$$L(\varphi \circ \psi, \dot{\varphi} \circ \psi) = L(\varphi, \dot{\varphi}), \quad \forall \psi \in \text{Diff}_{vol}(\mathcal{D})$$

donc expressible en termes de $\mathbf{u} = \dot{\varphi} \circ \varphi^{-1}$:

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \|\dot{\varphi}(X)\|^2 \mu(X) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \|\mathbf{u}(x)\|^2 \mu(x) =: \ell(\mathbf{u})$$

Quel est le principe d'action critique en termes de $\ell(\mathbf{u})$?

Calcul de la variation de $\mathbf{u} = \dot{\varphi} \circ \varphi^{-1}$

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{u} &= \delta(\dot{\varphi} \circ \varphi^{-1}) = \delta \dot{\varphi} \circ \varphi^{-1} - \nabla \dot{\varphi} \circ \nabla \varphi^{-1} \circ \delta \varphi \circ \varphi^{-1} \\ &= \partial_t(\delta \varphi \circ \varphi^{-1}) + \nabla(\delta \varphi \circ \varphi^{-1}) \cdot (\dot{\varphi} \circ \varphi^{-1}) - \nabla(\dot{\varphi} \circ \varphi^{-1}) \cdot (\delta \varphi \circ \varphi^{-1}) \\ &= \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} = \partial_t \mathbf{v} + [\mathbf{u}, \mathbf{v}].\end{aligned}$$

Donc

$$\partial_t \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = -\nabla p \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \delta \int_0^T \ell(\mathbf{u}) dt = 0 \\ \delta \mathbf{u} = \partial_t \mathbf{v} + [\mathbf{u}, \mathbf{v}], \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}(T) = 0 \end{cases}$$

C'est un cas particulier d'un théorème de réduction Lagrangienne par un groupe de symétrie. Idée de base:

Soit $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ un Lagrangien.

Soit $G \times Q \rightarrow Q$ une action d'un groupe sur Q

Soit $G \times TQ \rightarrow TQ$ l'action induite sur TQ

G est un groupe de symétrie si $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ est G -invariant

~ quantités conservées (Théorème de Noether)

~ réduire les dimensions du système

3.2 Réduction de Euler-Poincaré (livre *Marsden & Ratiu [1999]*) G groupe de Lie, \mathfrak{g} son algèbre de Lie.

Théorème: Soit $L : TG \rightarrow \mathbb{R}$ un Lagrangian G -invariant: $L(v_g h) = L(v_g)$, pour tous $h \in G$.

Soit $\ell : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ le Lagrangian réduit: $\ell(\xi) = \ell(v_g g^{-1}) = L(v_g)$.

Soit $g(t) \in G$ une courbe et soit $\xi(t) = \dot{g}(t)g(t)^{-1} \in \mathfrak{g}$.

Alors on a les équivalences suivantes:

- (1) $g(t)$ est solution des équations d'Euler-Lagrange pour L ;
- (2) $g(t)$ est un point critique pour le principe variationnel standard

$$\delta \int_0^T L(g(t), \dot{g}(t)) dt = 0, \quad \delta g(0) = \delta g(T) = 0;$$

- (3) $\xi(t)$ est solution des équations d'Euler-Poincaré

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta \ell}{\delta \dot{\xi}} = - \text{ad}_{\xi}^* \frac{\delta \ell}{\delta \xi}$$

- (4) $\xi(t)$ est critique pour le principe variationnel avec contraintes

$$\delta \int_0^T \ell(\xi(t)) dt = 0, \quad \delta \xi = \partial_t \eta + [\eta, \xi], \quad \eta(0) = \eta(T) = 0.$$

Exemples d'application du théorème:

(1) **Toupie rigide:** $G = SO(3) \ni A$, Lagrangien

$$L(A, \dot{A}) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \rho(X) \|\dot{A}X\|^2 d^3X \quad SO(3) - \text{invariant}$$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3) \simeq \mathbb{R}^3 \ni \Omega = A^{-1}\dot{A}$, $\ell(\Omega) = \frac{1}{2}\mathbf{I}\Omega \cdot \Omega$. Euler-Poincaré:

$$\mathbf{I}\dot{\Omega} = \mathbf{I}\Omega \times \Omega.$$

(2) **Euler incompressible:** $G = \text{Diff}_{vol}(\mathcal{D})$, Lagrangien

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \|\dot{\varphi}(X)\|^2 \mu(X) \quad \text{Diff}_{vol}(\mathcal{D}) - \text{invariant}$$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{X}_{div}(\mathcal{D}) \ni \mathbf{u} = \dot{\varphi} \circ \varphi^{-1}$, $\ell(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \|\mathbf{u}\|^2 \mu$. Euler-Poincaré:

$$\partial_t \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = -\nabla p.$$

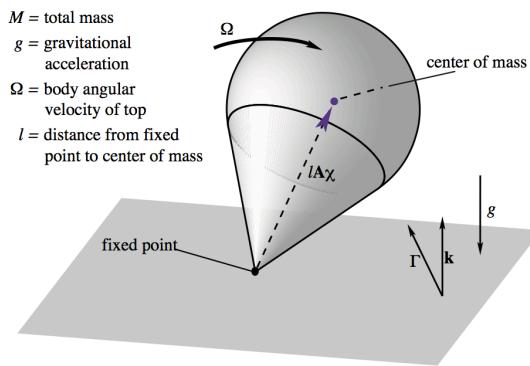
(3) **Euler incompressible tournant:** $G = \text{Diff}_{vol}(\mathcal{D})$

$$\ell(\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 + \mathbf{R} \cdot \mathbf{u} \right) \mu, \quad \text{rot } \mathbf{R} = 2\Omega, \quad \text{div } \mathbf{R} = 0$$

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + 2\Omega \times \mathbf{u} = -\nabla p.$$

Exemples qui nécessitent une théorie plus générale:

(1) **Toupie pesante:** $L_{\mathbf{e}_3}(A, \dot{A}) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \rho(X) \|\dot{A}X\|^2 d^3X - Mg\ell \mathbf{e}_3 \cdot A\chi$



L n'est pas $SO(3)$ -invariant sous $A \mapsto BA$
 L est $SO(3)$ -invariant sous $(A, \mathbf{e}_3) \mapsto (BA, B\mathbf{e}_3)$
 \leadsto variables Euleriennes: $\Omega = A^{-1}\dot{A}$ et $\Gamma = A^{-1}\mathbf{e}_3$.

Marsden&Ratiu [1999]

(2) **Équations de Boussinesq:** $L_{b_0}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \|\dot{\varphi}\|^2 \mu - \int_{\mathcal{D}} b_0(X) z \mu$

L n'est pas invariant sous $\varphi \mapsto \varphi \circ \psi$

L est invariant sous $(\varphi, b_0) \mapsto (\varphi \circ \psi, b_0 \circ \varphi)$.

\leadsto variables Euleriennes: $\mathbf{u} = \dot{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ et $\mathbf{b} = b_0 \circ \varphi^{-1}$.

\leadsto Lagrangien réduit: $\ell(\mathbf{u}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \|\mathbf{u}\|^2 dV - \int_{\mathcal{D}} \mathbf{b} z dV$.

Situation similaire pour modèle de St-Venant, les équations primitives, MHD, ... \leadsto théorie abstraite (Holm, Marsden & Ratiu [1998])

3.3 Réduction de Euler-Poincaré avec advection

Théorème: (Holm, Marsden, Ratiu [1998])

Soit $G \ni g$ un groupe de Lie agissant sur un espace vectoriel V et son dual $V^* \ni a$:

$$a \in V^* \mapsto ag \in V^*.$$

Soit $L_{a_0} : TG \rightarrow \mathbb{R}$ un Lagrangian dépendant d'un paramètre $a_0 \in V^*$ et tel que:

$$L(v_g h, a_0 h) = L(v_g, a_0), \quad \text{pour tout } h \in G$$

Soit $\ell : \mathfrak{g} \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$ le Lagrangian réduit: $\ell(\xi, a) = \ell(v_g g^{-1}, a_0 g^{-1}) = L(v_g, a_0)$.

Soit $g(t) \in G$ une courbe et soit $\xi(t) = \dot{g}(t)g(t)^{-1} \in \mathfrak{g}$ et $a(t) = a_0 g(t)^{-1} \in V^*$.

Alors on a les équivalences suivantes:

- (1) $g(t)$ est solution des équations d'Euler-Lagrange pour L_{a_0} ;
- (2) $g(t)$ est un point critique pour le principe variationnel standard

$$\delta \int_0^T L_{a_0}(g(t), \dot{g}(t)) dt = 0, \quad \delta g(0) = \delta g(T) = 0;$$

- (3) $\xi(t)$ est solution des équations d'Euler-Poincaré avec paramètre

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta \ell}{\delta \dot{\xi}} = - \text{ad}_\xi^* \frac{\delta \ell}{\delta \xi} + \frac{\delta \ell}{\delta a} \diamond a, \quad \dot{\xi} + a\xi = 0, \quad \text{où } \langle v \diamond a, \xi \rangle_{\mathfrak{g}} = - \langle a\xi, v \rangle_V;$$

- (4) $\xi(t)$ est critique pour le principe variationnel avec contraintes

$$\delta \int_0^T \ell(\xi(t), a(t)) dt = 0, \quad \delta \xi = \partial_t \eta + [\eta, \xi], \quad \delta a = -a\eta, \quad \eta(0) = \eta(T) = 0.$$

Exemples d'application du théorème:

(1) **Toupie pesante:** $G = SO(3) \ni A, V^* = \mathbb{R}^3 \ni a = \Gamma, a_0 = \mathbf{e}_3$.

$$\ell(\Omega, \Gamma) = \frac{1}{2} \mathbf{I} \Omega \cdot \Omega - Mg\ell\Gamma \cdot \chi.$$

$$\begin{cases} \mathbf{I} \dot{\Omega} = \mathbf{I} \Omega \times \Omega + Mg\ell\Gamma \times \chi \\ \dot{\Gamma} = \Gamma \times \Omega \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta \int_0^T \ell(\Omega, \Gamma) dt = 0 \\ \delta \Omega = \partial_t \psi + [\Omega, \psi], \quad \delta \Gamma = \Gamma \times \psi \end{cases}$$

(2) **Boussinesq:** $G = \text{Diff}_{vol}(\mathcal{D}), V^* = \mathcal{F}(\mathcal{D}) \ni a = b, a_0 = b_0$.

$$\ell(\mathbf{u}, b) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \|\mathbf{u}\|^2 - \int_{\mathcal{D}} bz$$

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} + bz = -\nabla p \\ \dot{b} + \mathbf{u} \cdot \nabla b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta \int_0^T \ell(\mathbf{u}, b) dt = 0 \\ \delta \mathbf{u} = \partial_t \mathbf{v} + [\mathbf{u}, \mathbf{v}], \quad \delta b = -\mathbf{v} \cdot \nabla b \end{cases}$$

(3) Equations primitives:

$$\ell(\mathbf{u}, \theta) = \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 - \frac{g}{\theta_0} \theta z \right) \mu$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{u}_h + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_h + \text{rot } \mathbf{R} \times \mathbf{u}_h = -\nabla_h p \\ \partial_t w + \mathbf{u} \cdot \nabla w + \frac{g}{\theta_0} \theta = -\partial_z p \\ \dot{\theta} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta \int_0^T \ell(\mathbf{u}, \theta) dt = 0 \\ \delta \mathbf{u} = \partial_t \mathbf{v} + [\mathbf{u}, \mathbf{v}], \\ \delta \theta = -\mathbf{v} \cdot \nabla \theta \end{array} \right.$$

Approximation hydrostatique

$$\ell(\mathbf{u}, \theta) = \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{u}_h\|^2 - \frac{g}{\theta_0} \theta z \right) \mu$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{u}_h + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_h + \text{rot } \mathbf{R} \times \mathbf{u}_h = -\nabla_h p \\ \frac{g}{\theta_0} \theta = -\partial_z p \\ \dot{\theta} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta \int_0^T \ell(\mathbf{u}, \theta) dt = 0 \\ \delta \mathbf{u} = \partial_t \mathbf{v} + [\mathbf{u}, \mathbf{v}], \\ \delta \theta = -\mathbf{v} \cdot \nabla \theta \end{array} \right.$$

(4) Fluides complexes: cristaux liquides (Ericksen-Leslie), superfluides, microfluides, nématique biaxiale, Landau-de Gennes $G = \text{Diff}(\mathcal{D}) \otimes \mathcal{F}(\mathcal{D}, SO(3))$ *FGB & Ratiu [2009], FGB & Tronci [2010]*.

4. Discrétisation du groupe de difféomorphismes

Pavlov, Mullen, Tong, Kanso, Marsden, Desbrun [2010]

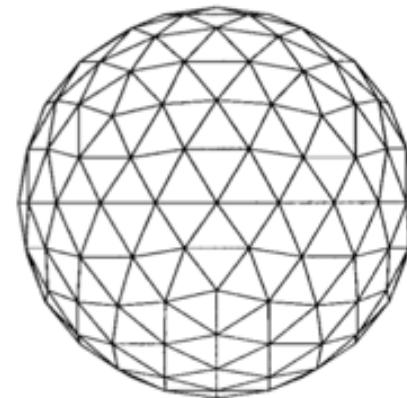
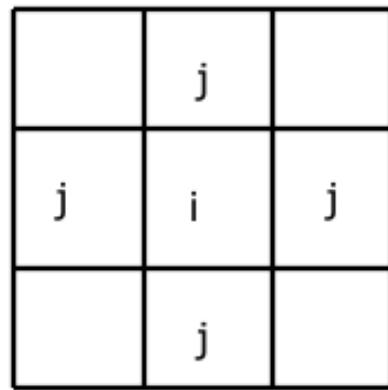
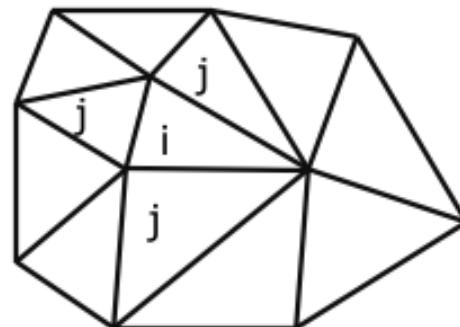
4.1 Discrétisation du domaine

Domaine \mathcal{D} (2D ou 3D)

Maillage \mathbb{D} avec N cellules C_i , $i = 1, \dots, N$ de volume $\Omega_{ii} = \text{Vol}(C_i)$

Notation: $j \in N(i)$ si C_i est une cellule voisine de C_j

Maillage cartésiens ou simpliciaux (non structurés)



Difficulté: Modèle de circulation atmosphérique général $\leadsto \mathcal{D} =$
Sphère \leadsto maillage non structurés (e.g. grille icosaédrique)
Solution: Intégrateurs variationnels (donc symplectiques).

4.2 Groupe de difféomorphismes discret

Pavlov et al. [2010]

But: trouver un groupe de Lie de dimension finie qui soit une bonne approximation du groupe

$$\text{Diff}_{vol}(\mathcal{D}) = \{\eta : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \mid \eta \text{ difféomorphisme, } \eta^* \mu = \mu\}.$$

Idée de base: discréteriser la représentation sur les fonctions $\mathcal{F}(\mathcal{D})$: pour $\varphi \in \text{Diff}_{vol}(\mathcal{D})$

$$L_\varphi : \text{Diff}_{vol}(\mathcal{D}) \rightarrow \text{Diff}_{vol}(\mathcal{D}), \quad L_\varphi(f) := f \circ \varphi^{-1}.$$

Alors:

$$(1) \quad \langle L_\varphi(f), L_\varphi(g) \rangle_{L^2} = \langle f, g \rangle_{L^2}$$

$$(2) \quad L_\varphi(C) = C$$

Discréterisation de $\mathcal{F}(\mathcal{D})$: une valeur par cellule:

$$f \in \mathcal{F}(\mathcal{D}) \rightsquigarrow (F_1, \dots, F_N) \in \mathbb{R}^N$$

$$\langle f, g \rangle_{L^2} \rightsquigarrow \sum_{i=1}^N F_i G_i \Omega_{ii} = F^\top \Omega G =: \langle F, G \rangle.$$

$$\begin{array}{ccc}
 f \in \mathcal{F}(\mathcal{D}) & \xrightarrow{\text{Diff}_{vol}(\mathcal{D})} & L_\varphi(f) \in \mathcal{F}(\mathcal{D}) \\
 \text{Discréétisation} \downarrow & & \downarrow \text{Discréétisation} \\
 F \in \mathbb{R}^N & \xrightarrow{\mathsf{D}_{vol}(\mathbb{D})} & q \cdot F \in \mathbb{R}^N.
 \end{array}$$

$\mathsf{D}_{vol}(\mathbb{D})$ groupe de matrices avec les propriétés (1)' et (2)'

$$(1)' \quad \langle q \cdot F, q \cdot g \rangle = \langle F, G \rangle \rightsquigarrow q^T \Omega q = \Omega$$

$$(2)' \quad q \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \rightsquigarrow \sum_{j=1}^N q_{ij} = 1$$

Donc le groupe de difféomorphismes discret est

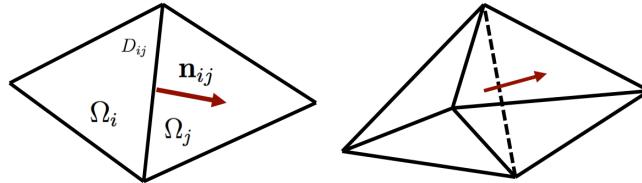
$$\mathsf{D}_{vol}(\mathbb{D}) = \left\{ q \in \mathsf{GL}(N) \mid q^T \Omega q = \Omega, \quad q \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \right\}$$

Algèbre de Lie

$$\mathfrak{d}_{vol}(\mathbb{D}) = \left\{ A \in \text{Mat}(N) \mid A^T \Omega + \Omega A = 0, \quad A \cdot \mathbf{1} = 0 \right\}$$

Interprétation: $q \rightarrow \varphi$ difféomorphisme, $q \cdot F \rightarrow f \circ \varphi^{-1}$,
 $A \cdot F \rightarrow -\mathbf{u} \cdot \nabla f$.

$A_{ij} \simeq -\frac{1}{2\Omega_{ii}} \int_{D_{ij}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{ij} \sim$ contrainte $i \notin N(j) \Rightarrow A_{ij} = 0$ non-holonôme!



4.3 Discrétisation spatiale des équations

Euler: *Pavlov et. al [2010]*, MHD & cristaux liquides planaires: *Gawlik et al. [2011]*, Boussinesq, Euler 2.5D tournant & stratifié: *Desbrun, Gawlik, FGB, Zeitlin [2011]*, (en préparation: Euler en rotation sur la sphère, équations primitives, cristaux liquides 3D)

(1) **Lagrangian:** (Cas des équations de Boussinesq)

$$\begin{aligned} \text{cas continu} \quad \ell(\mathbf{u}, b) &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \|\mathbf{u}\|^2 \mu - g \int_{\mathcal{D}} b z \mu \\ \text{cas discret} \quad \ell(A, B) &= \frac{1}{2} \langle A^\flat, A \rangle - g \langle B, Z \rangle \end{aligned}$$

où A^\flat est tel que si $A_1, A_2, A_3 \simeq \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ (et satisfont la contrainte) alors

$$\langle A_1^\flat, A_2 \rangle \simeq \int_{\mathcal{D}} g(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \mu \quad \text{et} \quad \langle A_1^\flat, [A_2, A_3] \rangle \simeq \int_{\mathcal{D}} g(\mathbf{u}_1, [\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]) \mu.$$

(2) Variations: (thm d'Euler-Poincaré avec advection)

cas continu $\delta \mathbf{u} = \partial_t \mathbf{v} + [\mathbf{u}, \mathbf{v}], \quad \delta b = -\mathbf{v} \cdot \nabla b$

cas discret $\delta A = \partial_t C + [C, A], \quad \delta B = -CB$

+ contrainte $i \notin N(j) \Rightarrow A_{ij} = 0$ Non-holonomic!

(3) Equations:

(thm d'Euler-Poincaré (non-holonomic) avec advection)

continu $\delta \int \ell(\mathbf{u}, b) dt = 0 \Rightarrow \partial_t \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} + g \mathbf{b} \mathbf{z} = -\nabla p,$
 $\partial_t b + \mathbf{u} \cdot \nabla b = 0$

discret $\delta \int \ell(A, B) dt = 0 \Rightarrow \left(\partial_t A^b + [A^b \Omega, A] \Omega^{-1} - g (B Z^T)^a + dP \right)_{ij} = 0$
 $\partial_t B - AB = 0 \quad i \in N(j)$

Plus explicitement:

$$\partial_t A_{ij}^b + \left(\sum_{l \in N(j)} A_{il}^b \Omega_{ll} A_{lj} - \sum_{k \in N(i)} A_{ik} A_{kj}^b \Omega_{jj} \right) \frac{1}{\Omega_{jj}} - g (B Z^T)^a_{ij} = - (P_i - P_j)$$

5. Schémas numériques

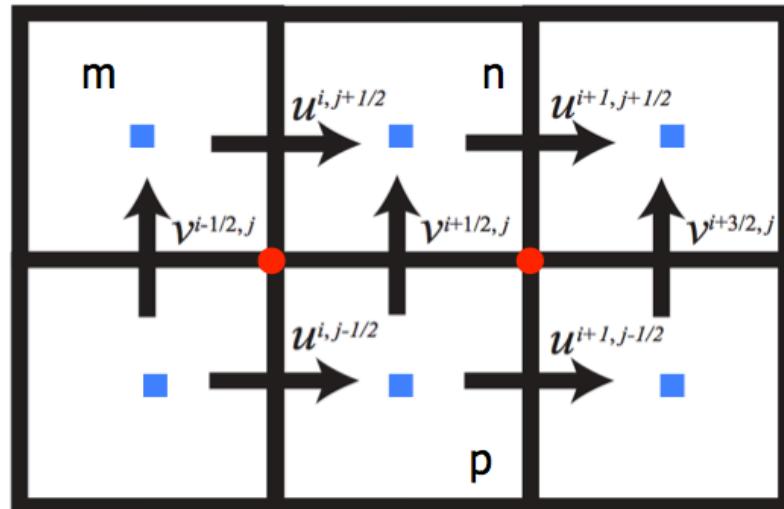
5.1 Maillage cartésien 2D

N cellules, de côtés ε ;

Vitesses discrètes $u^{i,j+1/2}$, $v^{i+1/2,j}$: logées sur les côtés;

Pressions discrètes P_i : centrées;

Vorticités discrètes ω_{ij} : logées sur les sommets.



Horizontally adjacent cells

$$A_{mn} = -\frac{1}{2\varepsilon} u^{i,j+1/2}$$

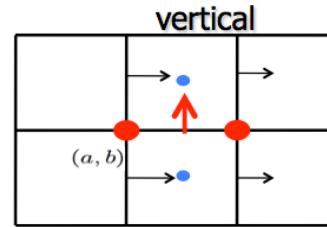
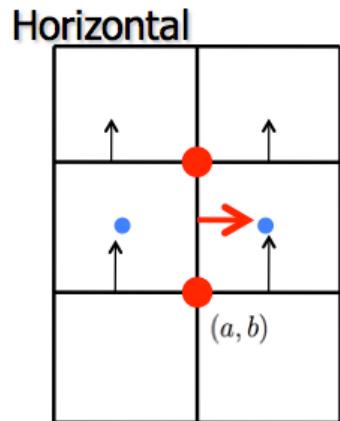
Vertically adjacent cells

$$A_{pn} = -\frac{1}{2\varepsilon} v^{i+1/2,j}$$

Staggered grid or Arakawa C grid

Sur le maillage cartésien 2D, l'équation
 $(\partial_t A^\flat + [A^\flat \Omega, A] \Omega^{-1} - g (B Z^\top)^a + dP)_{ij} = 0$ devient

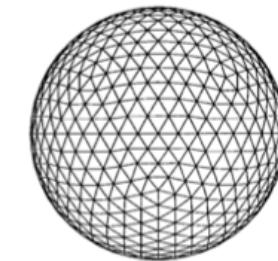
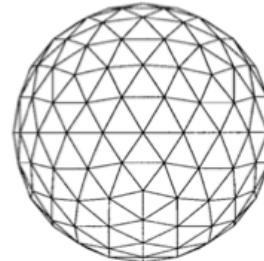
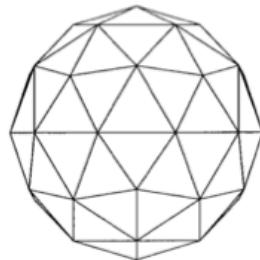
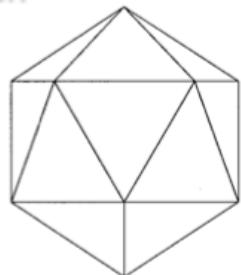
$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u^{a,b+1/2} - \frac{1}{2} (\omega^{a,b} w^{a,b} + \omega^{a,b+1} w^{a,b+1}) = -\frac{1}{\varepsilon} (P^{a+1/2,b+1/2} - P^{a-1/2,b+1/2}) \\ \partial_t w^{a+1/2,b} + \frac{1}{2} (\omega^{a,b} u^{a,b} + \omega^{a+1,b} u^{a+1,b}) + g B^{a+1/2,b} = -\frac{1}{\varepsilon} (P^{a+1/2,b+1/2} - P^{a+1/2,b-1/2}) \\ u^{a+1,b+1/2} + w^{a+1/2,b+1} - u^{a,b+1/2} - w^{a+1/2,b} = 0 \\ \partial_t B^{a+1/2,b+1/2} + \frac{1}{2\varepsilon} (u^{a+1,b+1/2} B^{a+3/2,b+1/2} - u^{a,b+1/2} B^{a-1/2,b+1/2} \\ \quad + w^{a+1/2,b+1} B^{a+1/2,b+3/2} - w^{a+1/2,b} B^{a+1/2,b-1/2}) = 0, \end{array} \right.$$



Extension du schémas MAC (Marker and cell) Harlow Welsh [1965],
Sadourny [1974].

5.2 Maillage icosaédrique

Construction



$N=20$

$N=80$

$N=320$

$N=1280$

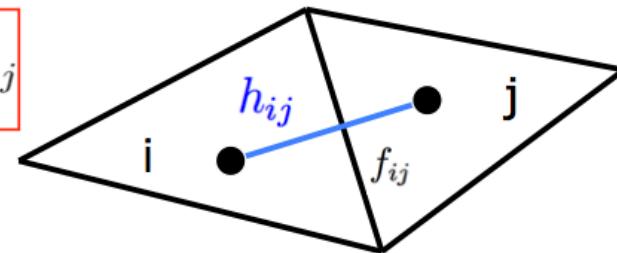
Difficultés: triangles inégaux, points pentagonaux.

Construction de A^\flat est ardue... (outils mathématiques: homologie, calcul extérieur discret)

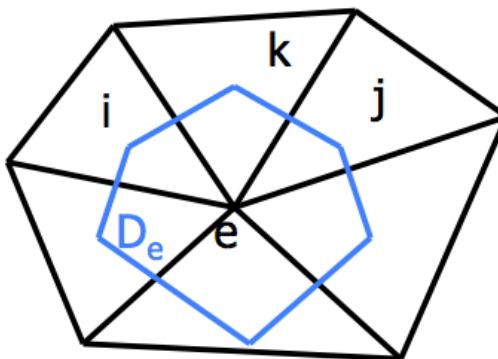
Deux cas:

-cellules voisines:

$$j \in N(i) : \quad A_{ij}^\flat = 2\Omega_{ii} \frac{h_{ij}}{f_{ij}} A_{ij}$$



-cellules 2-voisines:



$$j \in N(N(i)) : \quad A_{ij}^\flat + A_{jk}^\flat + A_{ki}^\flat = -K_e^k \omega_e$$

$$\omega_e = \frac{1}{D_e} \sum_{\circlearrowleft} \frac{h_{ij}}{f_{ij}} \Omega_i A_{ij}, \quad K_e^k = \text{aire}(D_e \cap C_k)$$

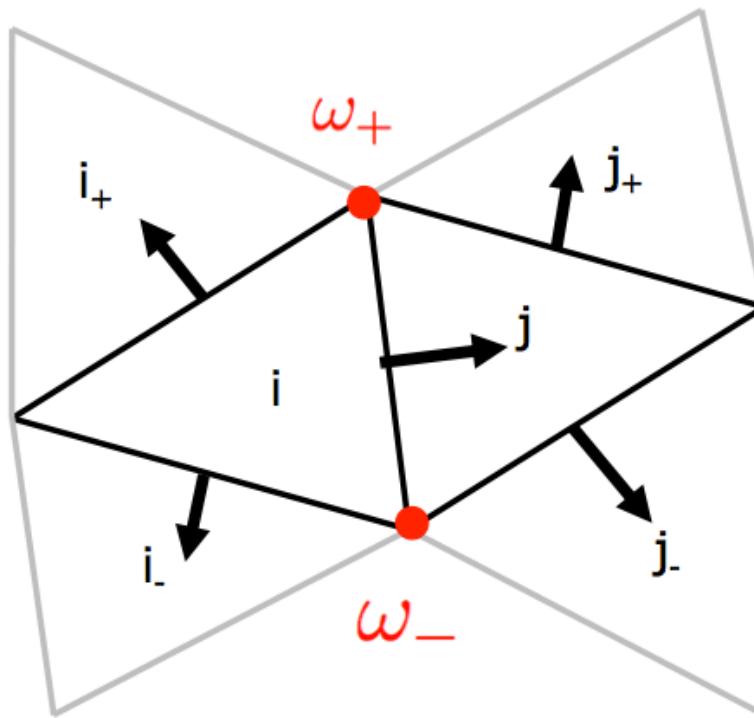
On the icosahedral grid, the equation

$$\partial_t A_{ij}^b + \left(\sum_{l \in N(j)} A_{il}^b \Omega_{ll} A_{lj} - \sum_{k \in N(i)} A_{ik} A_{kj}^b \Omega_{jj} \right) \frac{1}{\Omega_{jj}} = -(P_i - P_j)$$

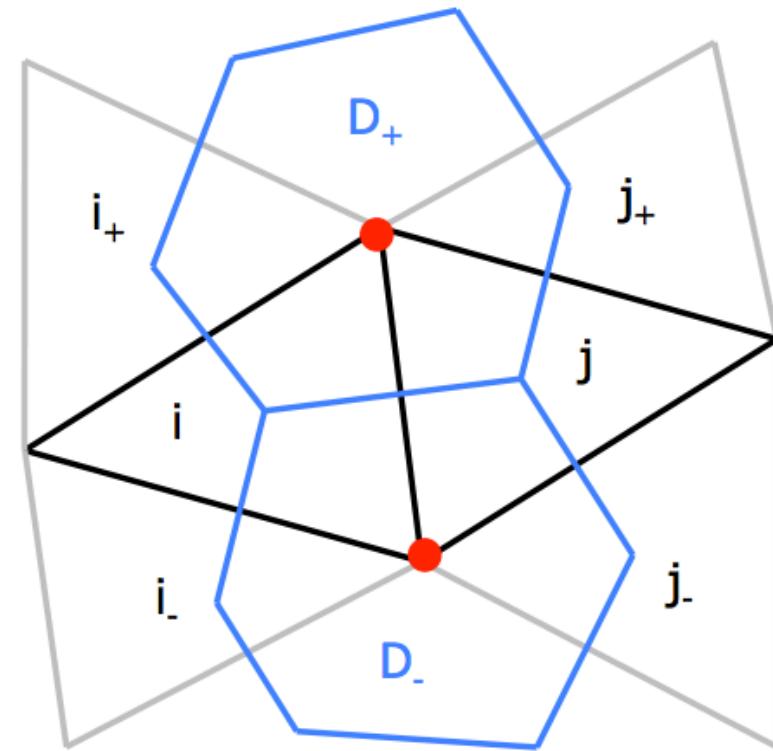
becomes:

$$h_{ij} \partial_t u_{ij} + \frac{1}{2} \omega_- (\mathcal{K}_{ii-}^- u_{ii-} + \mathcal{K}_{jj-}^- u_{jj-}) - \frac{1}{2} \omega_+ (\mathcal{K}_{ii+}^+ u_{ii+} + \mathcal{K}_{jj+}^+ u_{jj+}) = P_i - P_j$$

$$\mathcal{K}_{kl}^\pm := \frac{\text{aire}(D_\pm \cap \Omega_k)}{\Omega_k} f_{kl} \quad \omega_\pm = \sum_{\mathcal{O}_\pm} h_{kl} u_{kl} \quad A_{ij} = -\frac{f_{ij}}{2\Omega_i} u_{ij}$$



12/16/10



19

Exemple: Euler tournant sur la sphère:

Cas continu: $\ell(\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 + g(\mathbf{R}, \mathbf{u}) \right) \mu, \quad \operatorname{div} \mathbf{R} = 0$

Cas discret: $\ell(A) = \frac{1}{2} \langle A^\flat, A \rangle + \langle \mathcal{R}^\flat, A \rangle, \quad A_{ij} = -\frac{f_{ij}}{2\Omega_{ii}} \mathbf{u}_{ij}, \quad \mathcal{R}_{ij} = -\frac{f_{ij}}{2\Omega_{ii}} \mathbf{R}_{ij}$

Les équations

$$\partial_t A_{ij}^\flat + \left([(A^\flat + R^\flat) \Omega, A] \Omega^{-1} \right)_{ij} = -\mathbf{d}P_{ij}, \quad i \in N(j),$$

deviennent

$$\begin{cases} h_{ij} \partial_t u_{ij} + \frac{1}{2}(\omega_- + \nu_-) \left(\mathcal{K}_{ii_-}^- u_{ii_-} + \mathcal{K}_{jj_-}^- u_{jj_-} \right) \\ \quad - \frac{1}{2}(\omega_+ + \nu_+) \left(\mathcal{K}_{ii_+}^+ u_{ii_+} + \mathcal{K}_{jj_+}^+ u_{jj_+} \right) = P_i - P_j, \\ f_{ii_-} u_{ii_-} + f_{ij} u_{ij} + f_{ii_+} u_{ii_+} = 0 \end{cases}$$

où

$$\omega_\pm = \frac{1}{|D_\pm|} \sum_{\circlearrowleft \pm} h_{kl} u_{kl}, \quad \nu_\pm = \frac{1}{|D_\pm|} \sum_{\circlearrowleft \pm} h_{kl} r_{kl} \quad \text{et} \quad \mathcal{K}_{kl}^\pm := \frac{|D_\pm \cap \Omega_{kk}|}{\Omega_{kk}} f_{kl}$$