Existence Globale de Petites Solutions pour l'Équation de Klein-Gordon Cubique 1D

Annalaura Stingo

Université Paris 13

Seminar on Mathematical General Relativity
Université Pierre et Marie Curie
27 Février 2017

Le problème

On considère le problème de Cauchy suivant :
(KG)

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u + u = P(u, \partial_t \partial_x u, \partial_x^2 u; \partial_t u, \partial_x u) \\ u(t=1) = \varepsilon u_0(x) & t \geq 1, x \in \mathbb{R} \\ \partial_t u(t=1) = \varepsilon u_1(x) \end{cases}$$

P polynôme homogène de degré 3, affine en $(\partial_t \partial_x u, \partial_x^2 u)$ (*problème quasi-linéaire*) ; $\varepsilon \ll 1$ petit paramètre, u_0, u_1 fonctions lisses et faiblement décroissantes en espace ($O(|x|^{-1})$, pour $|x| \to +\infty$).

Rappel

- Énergie de u :
  $E(t, u) := \int \left(|\partial_t u(t,x)|^2 + |\partial_x u(t,x)|^2 + |u(t,x)|^2\right) dx$;
- Effet Dispersif Linéaire : $\|u(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-1/2}$.

Existence Globale en $d \geq 2$:

- $d \geq 3$, Klainerman ('85), Shatah ('85) : (KG) avec non-linéarité quadratique, données initiales à support compact ;
- $d = 2$, Ozawa, Tsutaya, Tsutsumi ('96) (cas *semi-linéaire* $P(u, \partial u)$), et ('97) (cas *quasi-linéaire* $P(u, \partial u, \partial^2 u)$) ;

Systèmes d'Équations de Klein-Gordon :

- $d = 3$: Germain ('11), Ionescu-Pausader ('14), Deng ('16) : système quadratique d'équations de Klein-Gordon avec vitesses différentes ;
- $d = 2$, Delort, Fang, Xue ('04) : systéme quasi-linéaire de deux équations Klein-Gordon avec masses m_1, m_2, avec données à support compact (le cas *résonnant* $m_1 = 2m_2$ sous une *condition nulle* sur la non-linéarité) ;

Systèmes Couplés Ondes/Klein-Gordon en $d = 3$:

- Katayama ('12), LeFloch, Ma ('14).

Résultats en $d = 1$:

- Moriyama, Tonegawa, Tsutsumi ('97) : intervalle d'existence $[1, T_\varepsilon]$, avec $T_\varepsilon \geq e^{c/\varepsilon^2}$, pour non-linéarité cubique, ou semi-linéaire. Possibilité de blow-up : Yordanov, Keel-Tao ('99) ;
- Delort ('01) : condition de structure sur P qui assure l'existence globale, quand les données sont à support compact ;
- Hayashi, Naumkin : ('12) problème semi-linéaire quadratique, ('08) système quadratique avec *strong null condition*, et données initiales dans un espace de fonctions analytiques.

Objectif

Prouver l'existence globale pour (KG) quand les données initiales ne sont pas localisées en espace, en combinant la méthode des champs de vecteurs de Klainerman avec une analyse microlocale semiclassique.

Théorème

Sous une condition de structure sur la non-linéarité P *(null condition),* $\exists s \in \mathbb{N}$ *suffisamment grand,* $\varepsilon_0 \in]0,1]$*, tels que, pour toutes données initiales réelles* $(u_0, u_1) \in H^{s+1}(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$

$$\|u_0\|_{H^{s+1}} + \|u_1\|_{H^s} + \|xu_0\|_{H^1} + \|xu_1\|_{L^2} \leq 1$$

et pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$*, le problème* (KG) *a une unique solution* $u(t,x) \in C^0([1,+\infty[, H^{s+1}(\mathbb{R})) \cap C^1([1,+\infty[; H^s(\mathbb{R}))$*. On a le développement asymptotique*

$$u(t,x) = \Re\left[\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}} a_\varepsilon\left(\frac{x}{t}\right) \exp\left[it\varphi\left(\frac{x}{t}\right) + i\varepsilon^2 \left|a_\varepsilon\left(\frac{x}{t}\right)\right|^2 \ \Phi_1\left(\frac{x}{t}\right) \log t\right]\right] + \frac{\varepsilon}{t^{\frac{1}{2}+\sigma}} r(t,x)\,,$$

avec $\langle x\rangle = \sqrt{1+x^2}$, $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$, $\Phi_1(x)$ *fonction réelle calculée à partir de* P*, et* $r(t,x)$ *un terme de reste.*

Théorème

Sous une condition de structure sur la non-linéarité P (null condition), $\exists s \in \mathbb{N}$ *suffisamment grand,* $\varepsilon_0 \in]0,1]$*, tels que, pour toutes données initiales réelles* $(u_0, u_1) \in H^{s+1}(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$

$$\|u_0\|_{H^{s+1}} + \|u_1\|_{H^s} + \|xu_0\|_{H^1} + \|xu_1\|_{L^2} \leq 1$$

et pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$*, le problème* (KG) *a une unique solution* $u(t,x) \in C^0([1,+\infty[, H^{s+1}(\mathbb{R})) \cap C^1([1,+\infty[; H^s(\mathbb{R}))$*. On a le développement asymptotique*

$$u(t,x) = \Re\left[\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}} a_\varepsilon\left(\frac{x}{t}\right) \exp\left[it\varphi\left(\frac{x}{t}\right) + i\varepsilon^2 \left|a_\varepsilon\left(\frac{x}{t}\right)\right|^2 \Phi_1\left(\frac{x}{t}\right) \log t\right]\right] + \frac{\varepsilon}{t^{\frac{1}{2}+\sigma}} r(t,x),$$

avec $\langle x \rangle = \sqrt{1+x^2}$, $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$, $\Phi_1(x)$ *fonction réelle calculée à partir de* P*, et* $r(t,x)$ *un terme de reste.*

Null condition : Vérifiée automatiquement par des non-linéarités Hamiltoniennes. Exemples de non-linéarités qui ne la vérifient pas et pour lesquelles on n'a pas d'existence globale.

Idée de la preuve : Cas modèle

On considère le modèle suivant :

$$(KG_{mod}) \quad \begin{cases} \left(D_t - \sqrt{1 + D_x^2}\right) u = \alpha |u|^2 u & t \geq 1, x \in \mathbb{R} \\ u\big|_{t=1} = \varepsilon u_0(x) \end{cases}$$

avec $D := \frac{1}{i}\partial$, $u_0(x)$ fonction lisse, $xu_0(x) \in L^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (*null condition* sur cet exemple).
Si on considère le *champ de Klainerman* $Z = t\partial_x + x\partial_t$, alors

$$\left(D_t - \sqrt{1 + D_x^2}\right) Zu = \alpha |u|^2 (Zu) + \ldots$$

d'où l'inégalité d'énergie :

$$\|Zu(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim \|Zu(1,\cdot)\|_{L^2} + \int_1^t \|u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty}^2 \|Zu(\tau,\cdot)\|_{L^2} d\tau$$

Argument de Bootstrap

On cherche des constantes $A, B > 0$ suffisamment grandes, et $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit, telles que, $\forall\, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, si u est solution de (KG_{mod}) dans $[1, T]$ et vérifie

(1a) $$\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty} \leq A\varepsilon t^{-\frac{1}{2}}$$

(1b) $$\|u(t,\cdot)\|_{L^2} + \|Zu(t,\cdot)\|_{L^2} \leq B\varepsilon t^{\sigma}$$

pour tout $t \in [1, T]$, et un $\sigma > 0$ petit, alors elle vérifie aussi

(2a) $$\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty} \leq \frac{A}{2}\varepsilon t^{-\frac{1}{2}}$$

(2b) $$\|u(t,\cdot)\|_{L^2} + \|Zu(t,\cdot)\|_{L^2} \leq \frac{B}{2}\varepsilon t^{\sigma}$$

Remarque : L'énergie n'est pas uniformément bornée en temps.

Argument de Bootstrap

On cherche des constantes $A, B > 0$ suffisamment grandes, et $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit, telles que, $\forall\, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, si u est solution de (KG_{mod}) dans $[1, T]$ et vérifie

$$\text{(1a)} \qquad \|u(t,\cdot)\|_{L^\infty} \leq A\varepsilon t^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{(1b)} \qquad \|u(t,\cdot)\|_{L^2} + \|Zu(t,\cdot)\|_{L^2} \leq B\varepsilon t^{\sigma}$$

pour tout $t \in [1, T]$, et un $\sigma > 0$ petit, alors elle vérifie aussi

$$\text{(2a)} \qquad \|u(t,\cdot)\|_{L^\infty} \leq \frac{A}{2}\varepsilon t^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{(2b)} \qquad \|u(t,\cdot)\|_{L^2} + \|Zu(t,\cdot)\|_{L^2} \leq \frac{B}{2}\varepsilon t^{\sigma}$$

Remarque : L'énergie n'est pas uniformément bornée en temps.
D'après l'inégalité d'énergie pour u et Zu, $(1a) + (1b) \Rightarrow (2b)$.

Propagation de l'estimation L^∞

Difficulté : Les équations de type *Klein-Gordon* (ou *ondes*) ne permettent pas de retrouver directement des estimation L^∞ pour u. De plus, une inégalité de type *Klainerman-Sobolev*

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty} \leq Ct^{-\frac{1}{2}} E(t,\partial^\alpha Zu)^{\frac{1}{2}}$$

ne nous donne pas la décroissance optimale $t^{-1/2}$.

Dans la littérature : Pour des données à support compact, la solution est localisée dans un cône (vitesse finie de propagation) $\Rightarrow$ Changement en coordonnées hyperboliques.

Nouvelle Idée : Déduire de l'EDP (KG_{mod}) une EDO, à l'aide du calcul pseudo-différentiel semi-classique.

Passage en coordonnées semi-classiques

On définit $v(t,x) = \sqrt{t}u(t,tx)$, $h := \frac{1}{t}$ *paramètre semi-classique* ($h \to 0$). La fonction v est solution de l'équation :

$$(KG_{sc}) \qquad D_t v - Op_h^w(\lambda_h(x,\xi))v = h\alpha|v|^2 v$$

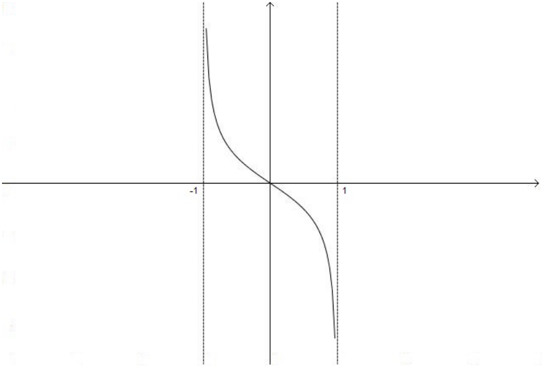
avec $\lambda_h(x,\xi) = x\xi + \sqrt{1+\xi^2}$.

Quantification de Weyl semi-classique d'un symbol $a(x,\xi)$ agissant sur $w(x)$

$$Op_h^w(a(x,\xi))w(x) := \frac{1}{2\pi h}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{h}(x-y)\xi} a(\frac{x+y}{2},\xi)w(y)\, dy d\xi.$$

On veut développer $\lambda_h(x,\xi)$ afin de transformer $Op_h^w(\lambda_h(x,\xi))$ en un produit par une fonction réelle $\omega(x)$, modulo des restes intégrables.

On introduit la variété $\Lambda = \{(x,\xi) | \partial_\xi \lambda_h = 0\} = \{(x,\xi) | \xi = d\varphi(x)\}$ avec $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$...



Λ pour Klein-Gordon

On introduit la variété $\Lambda = \{(x,\xi) | \partial_\xi \lambda_h = 0\} = \{(x,\xi) | \xi = d\varphi(x)\}$ avec $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$...

... et on considère l'opérateur $\mathcal{L} := \frac{1}{h} Op_h^w\big(x + \frac{\xi}{\langle\xi\rangle}\big)$, dont le symbole s'annule sur Λ. $\mathcal{L}v$ s'exprime à partir de Zu via l'équation (KG_{sc}) :

$$\frac{1}{i} Zu(t,y) = h^{\frac{1}{2}} \big[Op_h^w(\langle\xi\rangle)\mathcal{L}v + i Op_h^w\big(\frac{\xi}{\langle\xi\rangle}\big)v + \alpha x |v|^2 v \big](t,x)|_{x=\frac{y}{t}}$$

Estimation (1b) $\Rightarrow \|\mathcal{L}v(t,\cdot)\|_{L^2} = O(h^{-\sigma})$, $\sigma > 0$ petit.

On introduit la variété $\Lambda = \{(x,\xi) | \partial_\xi \lambda_h = 0\} = \{(x,\xi) | \xi = d\varphi(x)\}$ avec $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$...

... et on considère l'opérateur $\mathcal{L} := \frac{1}{h} Op_h^w\big(x + \frac{\xi}{\langle \xi \rangle}\big)$, dont le symbole s'annule sur Λ. $\mathcal{L}v$ s'exprime à partir de Zu via l'équation (KG_{sc}) :

$$\frac{1}{i} Zu(t,y) = h^{\frac{1}{2}} \left[Op_h^w(\langle \xi \rangle) \mathcal{L} v + i Op_h^w\Big(\frac{\xi}{\langle \xi \rangle}\Big) v + \alpha x |v|^2 v \right](t,x)|_{x=\frac{y}{t}}$$

Estimation (1b) $\Rightarrow \|\mathcal{L}v(t,\cdot)\|_{L^2} = O(h^{-\sigma})$, $\sigma > 0$ petit.

• Si $\gamma \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \gamma \equiv 1$ prés de 0, $\gamma\left(\frac{x+\frac{\xi}{\langle\xi\rangle}}{\sqrt{h}}\right)$ est une troncature près d'un voisinage de Λ, dont la taille dépend de h. On peut décomposer $v = \underbrace{Op_h^w(\gamma)v}_{v_\Lambda} + \underbrace{Op_h^w(1-\gamma)v}_{v_{\Lambda^c}}$, et écrire

$$
\begin{aligned}
v_{\Lambda^c} &= Op_h^w\left[\left(\frac{1-\gamma}{x+\frac{\xi}{\langle\xi\rangle}}\right)(x+\frac{\xi}{\langle\xi\rangle})\right]v \\
&= Op_h^w(e)Op_h^w\left(x+\frac{\xi}{\langle\xi\rangle}\right)v + O(h) = Op_h^w(e)h\mathcal{L}v + O(h)
\end{aligned}
$$

pour un certain symbole e. Par l'injection de Sobolev semi-classique, qui nous permet de déduire l'estimation L^∞ de l'estimation L^2 avec une perte en $O(h^{-\frac{1}{2}-})$, on contrôle la norme L^∞ de v_{Λ^c} par $h^{\frac{1}{2}-}(\|\mathcal{L}v\|_{L^2} + \|v\|_{L^2})$.

On applique $Op_h^w(\gamma)$ à l'équation (KG_{sc}). La fonction v_Λ est solution de

$$D_t v_\Lambda - Op_h^w(\lambda_h(x,\xi))v_\Lambda = \alpha h|v_\Lambda|^2 v_\Lambda + \textit{termes non-locaux}.$$

D'une part, les termes *non-locaux* viennent du fait qu'on remplace la non-linéarité $|v|^2 v$ par $|v_\Lambda|^2 v_\Lambda$, ceux-là contrôlés en norme L^∞ par $h^{\frac{3}{2}-}(\|\mathcal{L}v\|_{L^2} + \|v\|_{L^2})$; d'autre part, on a aussi des termes qui viennent du commutateur entre $Op_h^w(\gamma)$ et la partie linéaire de l'équation, et qui s'expriment à partir de $hOp_h^w\Big[\dot{\gamma}\Big(\frac{x+\frac{\xi}{\langle\xi\rangle}}{\sqrt{h}}\Big)\Big(\frac{x+\frac{\xi}{\langle\xi\rangle}}{\sqrt{h}}\Big)\Big]$.

Remarque : La dépendance en h dans la troncature γ implique que $\|Op_h^w(\gamma)\|_{\mathcal{L}(L^2;L^\infty)} = O(h^{-\frac{1}{4}-})$, meilleur que l'injection de Sobolev semi-classique (Ifrim-Tataru pour l'équation de Schrödinger).

$\Rightarrow \Big\|hOp_h^w\Big[\dot{\gamma}\Big(\frac{x+\frac{\xi}{\langle\xi\rangle}}{\sqrt{h}}\Big)\Big(\frac{x+\frac{\xi}{\langle\xi\rangle}}{\sqrt{h}}\Big)\Big]\Big\|_{L^\infty} \lesssim h^{\frac{5}{4}-}(\|\mathcal{L}v\|_{L^2} + \|v\|_{L^2})$

On applique $Op_h^w(\gamma)$ à l'équation (KG_{sc}). La fonction v_Λ est solution de

$$D_t v_\Lambda - Op_h^w(\lambda_h(x,\xi))v_\Lambda = \alpha h|v_\Lambda|^2 v_\Lambda + \textit{termes non-locaux}.$$

D'une part, les termes *non-locaux* viennent du fait qu'on remplace la non-linéarité $|v|^2 v$ par $|v_\Lambda|^2 v_\Lambda$, ceux-là contrôlés en norme L^∞ par $h^{\frac{3}{2}-}(\|\mathcal{L}v\|_{L^2} + \|v\|_{L^2})$; d'autre part, on a aussi des termes qui viennent du commutateur entre $Op_h^w(\gamma)$ et la partie linéaire de l'équation, et qui s'expriment à partir de $hOp_h^w\left[\dot{\gamma}\left(\frac{x+\frac{\xi}{\langle\xi\rangle}}{\sqrt{h}}\right)\left(\frac{x+\frac{\xi}{\langle\xi\rangle}}{\sqrt{h}}\right)\right]$.

Remarque : La dépendance en h dans la troncature γ implique que $\|Op_h^w(\gamma)\|_{\mathcal{L}(L^2;L^\infty)} = O(h^{-\frac{1}{4}-})$, meilleur que l'injection de Sobolev semi-classique (Ifrim-Tataru pour l'équation de Schrödinger).

$\Rightarrow \left\|hOp_h^w\left[\dot{\gamma}\left(\frac{x+\frac{\xi}{\langle\xi\rangle}}{\sqrt{h}}\right)\left(\frac{x+\frac{\xi}{\langle\xi\rangle}}{\sqrt{h}}\right)\right]\right\|_{L^\infty} \lesssim h^{\frac{5}{4}-}(\|\mathcal{L}v\|_{L^2} + \|v\|_{L^2})$

On applique $Op_h^w(\gamma)$ à l'équation (KG_{sc}). La fonction v_Λ est solution de

$$D_t v_\Lambda - Op_h^w(\lambda_h(x,\xi))v_\Lambda = \alpha h|v_\Lambda|^2 v_\Lambda + \textit{termes non-locaux}.$$

D'une part, les termes *non-locaux* viennent du fait qu'on remplace la non-linéarité $|v|^2 v$ par $|v_\Lambda|^2 v_\Lambda$, ceux-là contrôlés en norme L^∞ par $h^{\frac{3}{2}-}(\|\mathcal{L}v\|_{L^2} + \|v\|_{L^2})$; d'autre part, on a aussi des termes qui viennent du commutateur entre $Op_h^w(\gamma)$ et la partie linéaire de l'équation, et qui s'expriment à partir de $hOp_h^w\big[\dot{\gamma}\big(\frac{x+\frac{\xi}{\langle\xi\rangle}}{\sqrt{h}}\big)\big(\frac{x+\frac{\xi}{\langle\xi\rangle}}{\sqrt{h}}\big)\big]$.

Remarque : La dépendance en h dans la troncature γ implique que $\|Op_h^w(\gamma)\|_{\mathcal{L}(L^2;L^\infty)} = O(h^{-\frac{1}{4}-})$, meilleur que l'injection de Sobolev semi-classique (Ifrim-Tataru pour l'équation de Schrödinger).

$\Rightarrow \Big\|hOp_h^w\big[\dot{\gamma}\big(\frac{x+\frac{\xi}{\langle\xi\rangle}}{\sqrt{h}}\big)\big(\frac{x+\frac{\xi}{\langle\xi\rangle}}{\sqrt{h}}\big)\big]\Big\|_{L^\infty} \lesssim h^{\frac{5}{4}-}(\|\mathcal{L}v\|_{L^2} + \|v\|_{L^2})$

On applique $Op_h^w(\gamma)$ à l'équation (KG_{sc}). La fonction v_Λ est solution de

$$D_t v_\Lambda - Op_h^w(\lambda_h(x,\xi))v_\Lambda = \alpha h|v_\Lambda|^2 v_\Lambda + \textit{termes non-locaux}.$$

$$\|\text{termes non-locaux}\|_{L^\infty} \lesssim h^{\frac{5}{4}-}(\|\mathcal{L}v\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}) = \underbrace{O(h^{\frac{5}{4}-})}_{\text{reste intégrable}}$$

• La fonction v_Λ est localisé pour x dans un sous-intervalle compact de $]-1,1[$. On peut ainsi développer $\lambda_h(x,\xi)$ sur Λ, et écrire $\lambda_h(x,\xi) = \lambda_h(x, d\varphi(x)) + O((\xi - d\varphi)^2)$, d'où on déduit $Op_h^w(\lambda_h(x,\xi)) = \underbrace{\lambda_h(x, d\varphi(x))}_{\omega(x)} + O((hD_x - d\varphi)^2)$, $\omega(x)$ réelle.

• On peut exprimer $(hD_x - d\varphi)$ à partir de $Op_h^w\big(x + \frac{\xi}{\langle\xi\rangle}\big)$, et

$$Op_h^w\Big(x + \frac{\xi}{\langle\xi\rangle}\Big)^2 v_\Lambda = Op_h^w\Big[\gamma\Big(\frac{x + \frac{\xi}{\langle\xi\rangle}}{\sqrt{h}}\Big)\Big(x + \frac{\xi}{\langle\xi\rangle}\Big)^2\Big] v$$
$$\sim h^{\frac{3}{2}} Op_h^w\Big(a\Big(\frac{x + \frac{\xi}{\langle\xi\rangle}}{\sqrt{h}}\Big)\Big)\mathcal{L} v$$

$a(z) := \gamma(z)z$, d'où on a
$\|(hD_x - d\varphi(x))^2 v_\Lambda\|_{L^\infty} \lesssim h^{\frac{5}{4}-}(\|\mathcal{L}v\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}) = O(h^{\frac{5}{4}-})$.

On obtient

$$\underbrace{D_t v_\Lambda - \omega(x) v_\Lambda - \frac{1}{t}\alpha |v_\Lambda|^2 v_\Lambda}_{EDO} = \underbrace{O_{L^\infty}(t^{-\frac{5}{4}+})}_{\text{reste intégrable}}$$

On en déduit une estimation uniforme pour $\|v_\Lambda(t,\cdot)\|_{L^\infty}$ (et de $\|v(t,\cdot)\|_{L^\infty}$) et son comportement asymptotique, qui nous donne l'estimation de $\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty}$ en $t^{-1/2}$ cherchée (donc (2a)), et le comportement asymptotique de u.

Remarque : Pour une non-linéarité générale, on trouve dans l'EDO aussi des termes cubiques $v_\Lambda^3, |v_\Lambda|^2 \bar{v}_\Lambda, \bar{v}_\Lambda^3$, qu'on peut éliminer par formes normales. La *Null Condition* sur P est la condition nécessaire et suffisante pour que le coefficient α de $|v_\Lambda|^2 v_\Lambda$ soit réel.

(A.S.) A. Stingo, *Global existence and asymptotics for quasi-linear one-dimensional Klein-Gordon equations with mildly decaying Cauchy data*, à paraître dans le Bulletin de la SMF.

Nouvelles Perspectives

On veut étudier un système couplé ondes/Klein-Gordon en $d = 2$:

$$\text{(W-KG)} \qquad \begin{cases} \Box u = P(\partial u, \partial v; \partial^2 u, \partial^2 v) \\ \Box v + v = Q(\partial u, \partial v; \partial^2 u, \partial^2 v) \end{cases} \qquad t \geq 1, x \in \mathbb{R}^2$$

avec données initiales petites (de taille ε), décroissantes à l'infini.
P, Q polynômes homogènes de degré 2.
Le système représente un modèle d'interaction non-linéaire entre un champ non massif u et un champ massif v.
But :

- Prouver l'existence globale des solutions du problème (W-KG) ;
- Trouver des conditions de structure sur P, Q qui assurent l'existence globale ;
- Adapter la méthode précédente à ce problème.

Merci pour votre attention !